Université Sidi Mohammed Ben Abdellah
Ecole Nationale des Sciences Appliquées de Fès
Année Universitaire 2014-2015 / Semestre I

## Série 2 : Structure Algèbrique

### Relation binaire.

**Exercice 1** *Soit $\Re$ la relation binaire dans $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ définie par : $x\Re y \Longleftrightarrow x + y$ est divisible par 3.*

1. *$\Re$ est-elle réflexive ?*
2. *$\Re$ est-elle symétrique ?*
3. *$\Re$ est-elle antisymétrique ?*
4. *$\Re$ est-elle transitive ?*

**Exercice 2** 1. *Dans $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$, démontrer que la relation $\Re$ définie par :*

$$(x, y)\Re(x', y') \Longleftrightarrow xy' = x'y.$$

*est une relation d'équivalence.*

2. *Déterminer les classes d'équivalences de $(0, 1)$ et de $(6, 2)$.*

**Exercice 3** *(Supplémentaire)*
*On dit qu'une relation binaire sur un ensemble $E$ est une relation de préordre si elle est reflexive et transitive.*
*Soit $P$ une relation binaire de préordre. On considère la relation binaire $R$ définie sur $E$ par : $xRy \Leftrightarrow (xPy$ et $yPx)$.*

1. *Montrer que $R$ est une relation d'équivalence*
2. *Montrer que que l'on peut définir sur l'ensemble quotient $E/R$ une relation binaire $S$ par :*

$$\overline{x}S\overline{y} \Leftrightarrow xPy.$$

3. *Montrer que $S$ est une relation d'ordre sur $E/R$ (on l'appelle la relation d'ordre sur $E/R$ asssociée à la relation de préordre $P$).*
4. *On considère le cas suivant $E = \mathbb{R}^2$ et la relation $P$ définie par : Si $x = (x_1, x_2)$ ; $y = (y_1, y_2)$, on a :*

$$xPy \Leftrightarrow x_1 \leq y_1.$$

*Montrer que $P$ est une relation de préordre sur $E$ et étudier la relation d'ordre associée.*

## Groupe.

**Exercice 4** *Montrer que sur $\mathbb{R}$, la loi de composition interne : $xTy = x+y-xy$ est commutative associative, et qu'elle admet un élément neutre. S'agit-il d'une loi de groupe ?*

**Exercice 5** *Dans $\mathbb{R}^2$, on définie la loi suivante :*

$$(x,y)+(z,t)=(x+z,y+t).$$

1. *Montrer que $(\mathbb{R}^2,+)$ est un groupe.*
2. *$(\mathbb{Q}^2,+)$ est-il un sous groupe de $(\mathbb{R}^2,+)$ ? Justifier.*
3. *$(\mathbb{N}^2,+)$ est-il un sous groupe de $(\mathbb{R}^2,+)$ ? Justifier.*

**Exercice 6**

1. *Soit $(G,+)$, $(G_1,+)$ et $(G_2,+)$ trois groupes telque : $G \subseteq G_1 \cup G_2$.*
   *Montrer que : $G \subseteq G_1$ ou $G \subseteq G_2$.*
2. *Soit $H$ et $K$ deux sous groupes d'un groupe $G$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la réunion $H \cup K$ soit un groupe.*

**Exercice 7** *(Supplémentaire)*
*Construire tout les groupes possibles à 2 et à 3 éléments.*

**Exercice 8** *(Supplémentaire)*
*Soient $(G,.)$ un groupe, $S$ une partie de $G$, et $< S >$ le sous groupe de $G$ engendré par $S$.*

1. *Montrer que :*

$$< S >= \left\{ \prod_{fini} x_i^{\alpha_i} / x_i \in S, \alpha_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$= \left\{ \prod_{fini} x_i^{\alpha_i} / x_i \in S, \alpha_i \in \{-1,0,1\} \right\}.$$

2. *Soit $H$ un sous groupe de $G$. Montrer que :*
   $< S > \subseteq H \Leftrightarrow S \subseteq H$.

3. *Soit $\varphi : G \to H$ un homomorphisme de groupes et $S$ une partie de $G$. Montrer que :*

$$\varphi(< S >) = < \varphi(S) > .$$

## Anneau et Corps.

**Exercice 9** *Un anneau commutatif $A$ est dit Noethérien si toute suite croissante d'idéaux pour l'inclusion est stationnaire. Soit $A$ un anneau commutatif unitaire.*

1. *On considère une suite $I_n$ d'idéaux, croissante pour l'inclusion. Montrer que $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ est un idéal de $A$.*
2. *En déduire que tout anneau principal est Noethérien.*

**Exercice 10** *Soit $(A, +, .)$ un anneau commutatif unitaire et $a \in A$. L'élément $a$ est dit nilpotent s'il existe un entier naturel non nul $n$ telque $a^n = 0$.*

1. *Montrer que l'ensemble $N$ des éléments nilpotent est un idéal de $A$.*
2. *Montrer que l'anneau quotient $A/N$ n'a pas d'éléments nilpotent autre que zéro.*
3. *Soit $x \in A$ telque $(1 - x)$ est nilpotent. Montrer que $x$ est inversible dans $A$.*
4. *Soit $A := \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Déterminer les élément de $N$ et un générateur de l'idéal $N$.*
5. *Montrer que dans ce cas, l'anneau quotient $A/N$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

**Exercice 11** *(Supplémentaire)*
*Soit $A$ et $B$ deux anneaux. Dans $A \times B$ on définit une addition et une multiplication par :*

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d);$$
$$(a, b)(c, d) = (ac, bd).$$

1. *Montrer que $A \times B$ est un anneau, dit anneau produit.*
2. *Caractériser $A$ et $B$ pour que $A \times B$ soit unitaire ou soit commutatif.*

3. $A \times B$ peut-il être intègre ?
4. Déterminer tous les idéaux (resp., idéaux premiers) de $A \times B$.
5. Application : Déterminer tous les idéaux et idéaux premiers de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

**Exercice 12** *(Supplémentaire)*
Soient $(A, +, .)$ un anneau commutatif unitaire et $I$, $J$ deux idéaux de $A$.

1. Montrer que l'ensemble $I + J := \{x + y / x \in I, y \in J\}$ est un idéal de $A$ engendré par $I \bigcup J$.
2. Montrer que l'ensemble $IJ := \{\sum xy / x \in I, y \in J\}$ est un idéal de $A$ qui est contenu dans $I \bigcap J$.
3. Supposons que $I + J = A$. Montrer que :
   a) $I \bigcap J = IJ$.
   b) Il existe un isomorphisme d'anneaux de $A/IJ$ dans $(A/I) \times (A/J)$.
4. Montrer que si $I \bigcap J = \{0\}$ et $I + J = A$, alors l'anneau $A$ est isomorphe à l'anneau produit $I \times J$.

**Exercice 13** *(Supplémentaire)*
Soit $(A, +, .)$ l'anneau des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et soit $I$ l'ensemble des applications nulles en $a$ (avec $a \in \mathbb{R}$).

1. Montrer que $I$ est un idéal de $A$.
2. Montrer que $I$ est maximal.
3. Indiquer un corps isomorphe à $A/I$.

**Exercice 14** *(Supplémentaire)*
On considère le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ($p$ premier).

1. Montrer que l'application $\phi : x \to x^p$ de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ dans lui même est un automorphisme.
2. Montrer que le seul automorphisme de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est l'identite et par suite $\phi = Id$.
3. Déduire le théorème de Fermat :
   Si $a$ est un entier ; $p$ un nombre premier ; alors $a^p \equiv a \,(\text{mod. } p)$ c.à.d : $a^p - a \in p\mathbb{Z}$.

*Université Sidi Mohammed Ben Abdellah*
*Ecole Nationale des Sciences Appliquées de Fès*
*Année Universitaire 2014-2015 / Semestre I*

---

## Série 1 : Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

**Exercice 1** *On désigne par $n := ab$ les nombres entiers de deux chiffres. Montrer qu'on a :*

1. *$ab - ba$ est un multiple de 9.*
2. *$ab + ba$ est un multiple de 11.*

**Exercice 2** *Soit $n$ un entier de trois chiffres $abc$ et $m$ l'entier à trois chiffres obtenus en permutant le chiffre des centaines par le chiffre des unités. Montrer que $n - m$ est un multiple de 99.*

**Exercice 3** *Démontrer que la somme de trois cubes consécutifs est toujours divisible par 9.*

**Exercice 4** *Montrer que pour tout entier naturel non nul $n$, le nombre $A := n(n^2 - 1)$est un multiple de 6.*

**Exercice 5**

1. *Si $n$ est pair, montrer que $n^2 \equiv 0[8]$ ou $n^2 \equiv 4[8]$.*
2. *Si $n$ est impair, montrer que $n^2 \equiv 1[8]$.*

**Exercice 6** *Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations suivantes :*

1. *$3x + 2y = xy$.*
2. *$x^2 - y^2 - 4x - 2y = 5$.*

**Exercice 7** *Soit $a, b, d \in \mathbb{Z}$. Montrer l'équivalence :*

$$[\exists u, v \in \mathbb{Z}, au + bv = d] \iff pgcd(a, b)|d.$$

**Exercice 8** *Déterminer le pgcd et les coefficients de l'égalité de Bézout des entiers $a$ et $b$ suivants :*

1. *$a = 37$ et $b = 27$.*
2. *$a = 270$ et $b = 105$.*

**Exercice 9** *Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation :*

$$pgcd(x, y) + ppcm(x, y) = x + y.$$

**Exercice 10** *Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ les deux systèmes suivants :*

1. *$pgcd(x, y) = 5$ et $ppcm(x, y) = 60$.*
2. *$x + y = 100$ et $pgcd(x, y) = 10$.*